Musterlösung 11

1. Sei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

a) Da $T_B \sim \mathcal{N}(-6, 4)$, ist $(T_B + 6)/4$ standardnormalverteilt. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P[T_B < 0] = P\left[\frac{T_B + 6}{4} < \frac{6}{4}\right] = \Phi(6/4) = 0.9332,$$

wie der Tabelle zu entnehmen ist.

b) Die Zufallsvariable $-T_B$ ist $\mathcal{N}(6, 4)$-verteilt, da T_B $\mathcal{N}(-6, 4)$-verteilt ist. Da T_A und $-T_B$ unabhängig voneinander sind, ist $X = T_A - T_B$ auch wieder normalverteilt, und zwar mit Erwartungswert $0 + 6 = 6$ und Standardabweichung $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, also $X = T_A - T_B \sim \mathcal{N}(6, 5)$.

c) Gesucht ist

$$\begin{aligned} P[T_A < T_B] &= P[X < 0] = P\left[\frac{X - 6}{5} < \frac{-6}{5}\right] \\ &= \Phi(-6/5) = 1 - \Phi(6/5) = 1 - 0.8849 = 0.1151, \end{aligned}$$

wobei wir $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ verwendet haben.

d)

$$\begin{aligned} P[|X| \leq 1] &= P[-1 < X < 1] = P\left[-\frac{7}{5} < \frac{X - 6}{5} < -1\right] = \Phi(-1) - \Phi(-7/5) \\ &= (1 - 0.8413) - (1 - 0.9192) = 0.0779. \end{aligned}$$

e) Zu berechnen ist $E[|X|]$. Da $X \sim \mathcal{N}(6, 5)$, gilt $X = 5Y + 6$, wobei Y eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist. Demzufolge ist

$$
\begin{aligned}
E[|X|] &= E[|5Y+6|] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |5s+6| \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\, ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-6/5}^{\infty} (5s+6) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-6/5} (5s+6) \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds \\
&= \frac{5}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-6/5}^{\infty} s \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\, ds - \int_{-\infty}^{-6/5} s \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\, ds \right) \\
&\quad + 6 \left(\int_{-6/5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\, ds - \int_{-\infty}^{-6/5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\, ds \right) \\
&= \frac{5}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \right]_{-6/5}^{\infty} - \left[-\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) \right]_{-\infty}^{-6/5} \right) \\
&\quad + 6\big((1-\Phi(-6/5)) - \Phi(-6/5)\big) \\
&= \frac{10}{\sqrt{2\pi}} \exp(-36/50) + 6\,(1 - 2\Phi(-6/5)) \;=\; 6.561.
\end{aligned}
$$

2. **a)** Die Verteilungsfunktion von Z ist, in der zweiten Gleichung verwenden wir die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit,

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P[Z \le z] = P[Z \le z | Y > 0] P[Y > 0] + P[Z \le z | Y \le 0] P[Y \le 0] \\
&= P[X \le z | Y > 0]/2 + P[-X \le z | Y \le 0]/2 \\
&\overset{\text{unabh.}}{=} P[X \le z]/2 + P[X \ge -z]/2 = \left(\Phi(z) + 1 - \Phi(-z)\right)/2 = \Phi(z),
\end{aligned}
$$

wobei wir in der letzten Gleichung verwendet haben, dass $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ gilt. Also ist Z ebenfalls $\mathcal{N}(0,1)$ normalverteilt.

b) Weil $P[X = 0] = 0$ ist, gilt wegen der Definition von Z,

$$P[X + Z = 0] = P[Z = -X] = P[Y \le 0] = 1/2.$$

c) Nein, denn: wenn X und Z unabhängig wären, müsste für alle Intervalle A und B gelten

$$P[X \in A, Z \in B] = P[X \in A] P[Z \in B].$$

Dies gilt z.B. nicht für $A = [-1,1]$ und $B = [2,\infty)$, da dann die linke Seite gleich null und die rechte Seite verschieden von null ist.
Alternative Begründung: sonst wäre $X + Z \sim \mathcal{N}(0,\sqrt{2})$ und damit $P[X + Z = 0] = 0$ in Widerspruch zu **b)**.

d)

$$1 = \int_0^1 \int_0^1 c(a + b^2) da db = c \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + b^2\right) db = c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}c.$$

Damit findet man $c = \frac{6}{5}$.

Siehe nächstes Blatt!

e) Für die Randdichte von A hat man für $0 \le a \le 1$,

$$f_A(a) = \frac{6}{5}\int_0^1 (a+b^2)db = \frac{6}{5}a + \frac{2}{5}\ .$$

Also hat man

$$f_A(a) = \begin{cases} \frac{6}{5}a + \frac{2}{5}, & 0 \le a \le 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Randdichte von B hat man für $0 \le b \le 1$,

$$f_B(b) = \frac{6}{5}\int_0^1 (a+b^2)da = \frac{6}{5}b^2 + \frac{3}{5}\ .$$

Also hat man

$$f_B(b) = \begin{cases} \frac{6}{5}b^2 + \frac{3}{5}, & 0 \le b \le 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

f) Falls A und B unabhängig wären, würde $f_{A,B}(a,b) = f_A(a)\cdot f_B(b)$ gelten, was nicht der Fall ist. Also sind A und B nicht unabhängig.

g)

$$\begin{aligned} P[A \ge B] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{A,B}(a,b)\mathbb{1}_{\{a\ge b\}}dbda = \frac{6}{5}\int_0^1\left(\int_0^1 (a+b^2)\mathbb{1}_{\{a\ge b\}}db\right)da \\ &= \frac{6}{5}\int_0^1\left(\int_0^a (a+b^2)db\right)da \\ &= \frac{6}{5}\int_0^1\left(a^2+\frac{a^3}{3}\right)da = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$